(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **ریاضی۲ –فنی (۸ گروه هماهنگ)** نیمسال (اول/**دوم**) **۹۳-۱۳۹۲** نام مدرس:
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۹۳/۳/۲۱** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :
مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.
در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال۱- انتگرال منحنی‌الخط $\int_C \sin y\cos x dx + \cos y \sin x dy + dz$ را محاسبه کنید که در آن، C پاره خطی است که نقطه $A=(۰,۱,۱)$ را به نقطه $B=(۱,۰,-۱)$ وصل می کند. **۱۵ نمره**

سوال۲- انتگرال دوگانه $\int_{۰}^{۲\sqrt{\ln ۳}}\int_{y/۲}^{\sqrt{\ln ۳}} e^{x^۲}\, dx\, dy$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۳- انتگرال $\iint_D (۲x-y)^۲ \sin^۲(x+y)dxdy$ را حل کنید که در آن، ناحیه D، ناحیه محدود به متوازی الاضلاعی است که راسهای آن عبارتند از :
$A=(۰,۳)$, $B=(۳,۰)$, $A=(۲,-۲)$, $A=(-۱,۱)$ **۱۵ نمره**

سوال۴- مساحت قسمتی از رویه $۲x^{\frac{۳}{۲}}+۲y^{\frac{۳}{۲}}-z=۰$ که بالای مربع $[۰,۱]\times[۰,۱]$ قرار دارد را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۵- حجم جسم محدود به سطوح $z=۱+x^۲+y^۲$ و $z=۴-۲x^۲-۱۱y^۲$ را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۶- اگر $\vec{F}=(z^۲-x)\vec{i}+xy\,\vec{j}+۳z\vec{k}$ یک میدان برداری و S سطح بالایی قسمتی از رویه $z=۴-y^۲$, $z\geq ۰$ باشد که بین صفحات $x=۰$ و $x=۳$ قرار دارد ، انتگرال سطح $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۷- V ناحیه محدود به دو کره $\rho=۱$ و $\rho=۲$ است و S سطح خارجی ناحیه V می‌باشد. اگر $\vec{F}=(۵x^۳+۱۲xy^۲, y^۳+e^y\sin z, ۵z^۳+e^y\cos z)$ یک میدان برداری باشد مطلوب است شار گذرنده از سطح S توسط نیروی $\vec{F}$. (یعنی : $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$) **۲۰ نمره**

موفق باشید

سوال۱- روش اول : قرار می‌دهیم $R=1$, $Q=\cos y\sin x$, $P=\sin y\cos x$ و مشاهده می‌کنیم که

$$P_y-Q_x=-\sin y\sin x+\sin y\sin x=0\ ,\ P_z-R_x=0-0=0\ ,\ Q_z-R_y=0-0=0$$

یعنی کرل تابع برداری (P,Q,R) برابر صفر و در نتیجه انتگرال مستقل از مسیر است. همچنین تابع f وجود دارد که $\nabla f=(P,Q,R)$ به سادگی دیده می‌شود که $f(x,y,z)=\sin x\sin y+z$. ابتدای مسیر C نقطه A و نقطه انتهای آن B است.

اکنون داریم :

$$\int_C \sin y\cos x dx+\cos y\sin x dy+dz=\sin x\sin y+z\,|_A^B=(\sin 1)(\sin 0)-1-(\sin 0)(\sin 1)-1=-2$$

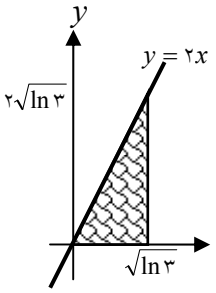
روش دوم : معادله پارامتری پاره خط واصل نقاط A و B عبارت است از : $x=t\,,y=1-t\,,z=2-t\ ,\ 0\le t\le 1$

بنابر این می‌توانیم بنویسیم :

$$\int_C \sin y\cos x dx+\cos y\sin x dy+dz=\int_0^1 \sin(1-t)\cos t\,dt+\cos(1-t)\sin t(-dt)+(-2dt)$$

$$=\int_0^1[\sin(1-t)\cos t-\cos(1-t)\sin t-2]dt=\int_0^1[\sin(1-2t)-2]dt$$

$$=\frac{1}{2}\cos(1-2t)-2t\,|_0^1=\frac{1}{2}\cos(-1)-2-\frac{1}{2}\cos(1)=-2$$



سوال۲- برای حل این انتگرال باید ترتیب انتگرالگیری را عوض کنیم . داریم :

$$\int_{y=0}^{2\sqrt{\ln 3}}\int_{x=y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\ dx\,dy=\int_0^{\sqrt{\ln 3}}\int_0^{2x} e^{x^2}\ dy\,dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{\ln 3}} 2xe^{x^2}dx=e^{x^2}\ |_0^{\sqrt{\ln 3}}=3-1=2$$

سوال۳- تغییر متغیر $v=x+y$, $u=2x-y$ را در نظر می‌گیریم. داریم $dudv=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}dxdy=3dxdy$

$$\iint_D (2x-y)^2\sin^2(x+y)dxdy=\frac{1}{3}\iint_{D'}u^2\sin^2 v\,dudv=\frac{1}{3}\int_{v=0}^{3}\int_{u=-3}^{6}u^2\sin^2 v\,dudv=\frac{1}{3}\int_{u=-3}^{6}u^2\sin^2 v\,dudv$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{6^3+3^3}{3}\int_{v=0}^{3}\sin^2 v\,dv=9\int_{v=0}^{3}\frac{1-\cos 2v}{2}dv=9[\frac{v}{2}-\frac{1}{4}\sin 2v]_0^3=9[\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\sin 6]=\frac{9}{4}(6-\sin 6)$$

سوال۴- باید انتگرال سطح $\iint_S dS$ را محاسبه کنیم. بردار یکه قایم بر سطح S در نقطه (x,y,z) عبارت است از :

$$\vec{n}=\pm\frac{(3\sqrt{x},3\sqrt{y},-1)}{\sqrt{9x+9y+1}}$$

بنابر این $dS=\sqrt{9x+9y+1}\,dxdy$ و در نتیجه :

$$\iint_S dS=\iint_D\sqrt{9x+9y+1}\,dxdy=\int_0^1\int_0^1\sqrt{9x+9y+1}\,dxdy$$

$$=\int_0^1\frac{2}{27}(9x+9y+1)^{\frac{3}{2}}\,|_0^1\,dy=\frac{2}{27}\int_0^1[(9y+10)^{\frac{3}{2}}-(9y+1)^{\frac{3}{2}}]dy$$

$$=\frac{4}{1215}[(9y+2)^{\frac{5}{2}}-(9y+1)^{\frac{5}{2}}]_0^1=\frac{4}{1215}[11^{\frac{5}{2}}-10^{\frac{5}{2}}-2^{\frac{5}{2}}+1^{\frac{5}{2}}]=\frac{4}{1215}[121\sqrt{11}-100\sqrt{10}-4\sqrt{2}+1]$$

سوال۵- اشتراک دو رویه $z=1+x^2+y^2$, $z=4-2x^2-11y^2$ عبارت است از بیضی $x^2+4y^2=1$ و تصویر ناحیه مورد نظر روی صفحه $z=0$ ، ناحیه داخل همین بیضی است. برای پیدا کردن حجم با استفاده از مختصات دکارتی داریم :

$$V=\int_{-1}^{1}\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}\int_{1+x^2+y^2}^{4-2x^2-11y^2}dzdydx=\int_{-1}^{1}\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}(3-3x^2-12y^2)dydx=3\int_{-1}^{1}\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-4y^2)dydx$$

اکنون اگر تغییر متغیر $x=r\cos t$, $y=\frac{1}{2}r\sin t$ را اعمال کنیم داریم : $dxdy=\begin{vmatrix}\cos t & -r\sin t\\ \frac{1}{2}\sin t & \frac{1}{2}r\cos t\end{vmatrix}drdt=\frac{1}{2}rdrdt$

در نتیجه : $V=3\int_{-1}^{1}\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-4y^2)dydx=3\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r^2)\times\frac{1}{2}rdtdr=3\pi\int_0^1(r-r^3)dr=3\pi[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}]_0^1=\frac{3\pi}{4}$

سوال۶- تصویر سطح S بر روی صفحه $z=0$ ناحیه مستطیلی D است که در آن $-2\le y\le 2$, $0\le x\le 3$ و بردار یکه قائم سطح S در نقطه (x,y,z) برابر است با $\vec{n}=\frac{(0,2y,1)}{\sqrt{4y^2+1}}$. پس داریم $dS=\sqrt{4y^2+1}\,dxdy$ و $\vec{F}\cdot\vec{n}=\frac{2xy^2+3z}{\sqrt{4y^2+1}}=\frac{2xy^2+12-3y^2}{\sqrt{4y^2+1}}$.

بالاخره داریم : $\iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_D(2xy^2+12-3y^2)dxdy=\int_{-2}^{2}\int_0^3(2xy^2+12-3y^2)dxdy=\int_{-2}^{2}36\,dy=144$

سوال۷- با توجه شرایط مساله، می‌توان از قضیه واگرایی(دیورژانس) استفاده کرد. $\iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_V div\vec{F}\,dV$

با توجه به صورت مساله و ناحیه V، بهتر است که از مختصات کروی استفاده کنیم.

در مختصات کروی ، ناحیه V به صورت $1\le\rho\le 2$ نوشته می‌شود.

$$div\vec{F}=15x^2+12y^2+3y^2+e^y\sin z+15z^2-e^y\sin z=15(x^2+y^2+z^2)=15\rho^2$$

$$dV=\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$\iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\int_{\rho=1}^{2}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}15\rho^4\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi\,d\rho=30\pi\int_{\rho=1}^{2}\int_{\varphi=0}^{\pi}\rho^4\sin\varphi\,d\varphi\,d\rho$$

$$=30\pi\int_{\rho=2}^{3}\int_{\varphi=0}^{\pi}\rho^4[-\cos\varphi]_0^{\pi}\,d\rho=60\pi\int_{\rho=1}^{2}\rho^4\,d\rho=12\pi\rho^5\,|_1^2=372\pi$$